Υπενθύμιση: Αν $a,b \in \mathbb{Z}$ λέμε $b|a$ αν $\exists k \in \mathbb{Z}$ με $a=kb$

π.χ. 1) Αν $a=0$, τότε κάθε ακέραιος b διαιρεί το a, γιατί $0=0 \cdot a$

2) Αν $b=1$ κ' $a \in \mathbb{Z}$, τότε $b|a$, γιατί $a=a \cdot 1$

3) Αν $a=1$ κ' $b|a$ τότε $b=1$ ή $b=-1$.

Απόδειξη: $0 \nmid 1$ φανερό. Αν $b \neq 0,-1,1$ τότε $|b| \geq 2$ κ' άρα $1=kb \Rightarrow 1=|k$
αντίφαση, γιατί $|k| \geq 1$ κ' $|b| \geq 2 \Rightarrow |kb| \geq 2$

Πρόταση: Έστω $a,a',b \in \mathbb{Z}$. Υποθέτουμε $b|a$ κ' $b|a'$. Τότε $b|a+a'$

Απόδειξη: Υπάρχουν $k,k' \in \mathbb{Z}$ με $a=bk$ κ' $a'=k'b$
Συνεπώς $a+a'=kb+k'b=(k+k')b$ άρα $b|a+a'$

Πιο γενικά.
Πρόταση: Έστω $a,a',b \in \mathbb{Z}$ κ' $x,y \in \mathbb{Z}$. Υποθέτουμε $b|a$ κ' $b|a'$. Τότε $b|xa+ya'$

Απόδειξη: Υπάρχουν $k,k' \in \mathbb{Z}$ με $a=kb$ κ' $a'=k'b$

Συνεπώς, $xa+ya'=xkb+yk'b=(xk+yk')b$. Άρα $b|xa+ya'$

Παρατήρηση: Σαν ειδική περίπτωση, αν $b|a$ τότε $b|-a$

π.χ. $3|9$, $3|12$, άρα $3|(2019 \cdot 9+2018 \cdot 12)$

Ορισμός: Αν $a,b \in \mathbb{Z}$ λέμε ότι το a είναι ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ του b αν $b|a$

Πρόταση: Έστω $a=(a_5, a_{5-1}, a_{5-2}, \dots, a_1, a_0)_{10}$ η γραφή του α στο δεκαδικό.
Τότε:
(i) $2|a$ ανν $2|a_0$ (δηλ $a_0 \in \{0,2,4,6,8\}$
(ii) $5|a$ ανν $a_0=0$ ή $a_0=5$
(iii) $10|a$ ανν $a_0=0$
(iv) $3|a$ ανν $3|(a_0+a_1+\dots+a_5)$
(v) $11|a$ ανν $11|(a_5-a_{5-1}, a_{5-2}-a_{5-3}+\dots)$

Απόδειξη: Έχουμε $a=a_0+a_1 10+a_2 10^2+\dots+a_5 10^5$

(i) Υποθέτουμε $2|a_0$. Αφού $2|10 \overset{\text{πρόταση}}{\Rightarrow} 2|a_0+a_1 10 \xrightarrow{\text{αφού } 2|10^2}$ Έχουμε $2|a$

Αντίστροφα, υποθέτουμε $2|a$. Αφού $2|a_1 10+\dots+a_5 10^5$ από την πρόταση $2|(a-(a_1 10+a_2 10^2+\dots+a_5 10^5))$, δηλ $2|a_0$

(ii), (iii) παρόμοιες με (i)

(iv) ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ. Έστω $l\geq 1$. Τότε $3|10^l-1$ (δηλ $3|10-1, 3|10^2-1, 3|10^3-1$ κτλ

Απόδειξη: Επαγωγή στο l.

Βήμα 1º Για $l=1$ ισχύει, γιατί $3|10^1-1=9$

Βήμα 2º Έστω $l\geq 1$ κ' υποθέτουμε $3|10^l-1$
Νδο $3|10^{l+1}-1$
Έχουμε $10^{l+1}-1=10\cdot 10^l-1=(9+1)10^l-1=9\cdot 10^l+(10^l-1)$

Αφού $3|9$ κ' $3|10^l-1$ από υπόθεση επαγωγής, έπεται $3|9\cdot 10^l+(10^l-1)$, δηλ $3|10^{l+1}-1$

Συνεπώς από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής έχουμε τον ισχυρισμό.

Έχουμε $a=a_0+10a_1+10^2a_2+\dots+10^5a_5=a_0+(10-1)a_1+a_1+(10^2-1)a_2+a_2+\dots+(10^5-1)a_5+a_5=(a_0+a_1+\dots+a_5)+(10-1)a_1+(10^2-1)a_2+\dots+(10^5-1)a_5$

Αφού από ισχυρισμό $3|10^\ell - 1 \ \forall \ell \geq 1$, έχουμε $3|(10-1)a_1 + (10^2-1)a_2 + \dots + (10^5-1)a_5$.

Συνεπώς $a = (a_0 + a_1 + \dots + a_5) +$ (πολλαπλάσιο του 3) κ' τα επιχειρήματα στην απόδειξη του (i) δίνει ότι $3|a$ ανν $3|(a_0 + a_1 + \dots + a_5)$

(ii) Προκύπτει από τον ισχυρισμό

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Αν $u \in \mathbb{Z}$ θετικός κ' περιττός, τότε $11|10^u + 1$, ενώ αν $u \in \mathbb{Z}$ θετικός κ' άρτιος, τότε $11|10^u - 1$

Οι αποδείξεις είναι παρόμοιες κ' δεν θα τις κάνουμε.

πχ Ισχύει $11|15800321$ ή όχι;

Λύση: Έχουμε $15800321 = (1,5,8,0,0,0,3,2,1)_{10}$ κ' $1-5+8-0+0-0+3-2+1=6$

Αφού $11 \nmid 6$ από την πρόταση $11 \nmid 15800321$

πχ. Ισχύει $3|2019$; Ναι, γιατί $2019 = (2,0,1,9)_{10}$ κ' $2+0+1+9=12$ κ' $3|12$

Ισχύει $11|2019$; Όχι, γιατί $2-0+1-9=-7$ κ' $11 \nmid -7$

Πρόταση Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $ab=1$. Τότε $a=1$ κ' $b=1$ ή $a=-1$ κ' $b=-1$

Απόδειξη

$1 = ab \Rightarrow |1| = |ab| \Rightarrow |a||b| = 1$

Αν $a=0$ ή $b=0$ έχουμε αντίφαση. Άρα $|a| \neq 0, |b| \neq 0$. Αν $|a| \geq 2$ τότε $|ab| \geq |a| \geq 2$, αντίφαση. Όμοια αν $|b| \geq 2$. Άρα $|a|=1$ κ' $|b|=1$. Συνεπώς $a \in \{1,-1\}$ κ' $b \in \{1,-1\}$ κ' άρα το αποτέλεσμα έπεται.

Πόρισμα Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $a|b$ κ' $b|a$. Τότε $b=a$ ή $b=-a$

Απόδειξη:
Αφού $a|b$ $\exists k \in \mathbb{Z}$ με $b=ka$ (1)
Αφού $b|a$ $\exists k' \in \mathbb{Z}$ με $a=k'b$ (2)
(1)+(2) $b=ka=(kk')b \Rightarrow (1-kk')=b=0$ (*)
Αν $b=0$ τότε $a=0$ κ' το συμπέρασμα ισχύει
Αν $b\neq 0$ (*) $\Rightarrow 1-kk'=0 \Rightarrow kk'=1 \xrightarrow{\text{πρόταση}} k=1$ ή $k=-1$, άρα $b=a$ ή $b=-a$

Ορισμός: Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, όχι κ' οι δύο μηδέν. Ένας ακέραιος d λέγεται ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ των a κ b, $d\geq 1$ κ' $d|a$, $d|b$ κ' κάθε θετικός κοινός διαιρέτης d' των a κ' b έχει την ιδιότητα $d'\leq d$

πχ ΜΚΔ $(4,6)=2$, γιατί οι θετικοί διαιρέτες του 4 είναι 1, 2, 4 κ' του 6 είναι 1, 2, 3, 6

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Έστω S το σύνολο των θετικών κοινών διαιρετών των ακεραίων a, b με $a\neq 0$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Το σύνολο S είναι μη κενό κ' άνω φραγμένο

Απόδειξη $S\neq \emptyset$, γιατί $1\in S$. Έστω $e\in S$. Τότε $e|a$ κ' $e|b$. Συνεπώς $\exists k \in \mathbb{Z}$ με $a=ek$ Αφού $a\neq 0, k\neq 0$ Άρα $a=ek \Rightarrow e\leq a$, (αφού $k\geq 1$)
Άρα S άνω φραγμένο (από τα πάνω)
Συνεπώς, ο ΜΚΔ των a, b $\exists$ κ' είναι μοναδικός. Το ίδιο επιχείρημα ισχύει αν $b\neq 0$.

Προσοχή Ο ΜΚΔ$(0,0)$ ΔΕΝ ορίζεται

Συμβολισμός: ΜΚΔ(a,b) ή (a,b) συμβολίζουμε τον ΜΚΔ των a, b.

Πρόταση: Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $(a,b)\neq(0,0)$ κ' $k\in\mathbb{Z}$. Τότε $(a-kb, b)\neq(0,0)$ κ' ΜΚΔ$(a,b)=$ ΜΚΔ$(a-kb, b)$

Απόδειξη: Αν $b \neq 0$ $(a-k \cdot b) \neq (0,0)$, γιατί $b \neq 0$

Αν $b=0$, $a \neq 0$ κ' $a-kb=a$, άρα $(a-kb, b) \neq (0,0)$

Θέτουμε $d_1 = ΜΚΔ(a,b)$, $d_2 = ΜΚΔ(a-kb, b)$

$$\text{Έχουμε } \left.\begin{array}{l} d_1 | a \\ \text{κ' } d_1 | b \\ \text{κ' } d_1 \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 | a-kb \\ d_1 | b \\ d_1 \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow d_1 \leq d_2$$

$$\text{Έχουμε } \left\{\begin{array}{l} d_2 | a-kb \\ d_2 | b \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} d_2 | (a-kb)+kb \\ d_2 | b \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_2 | a \\ d_2 | b \end{array}\right. \Rightarrow d_2 \leq d_1$$

Αφού $d_1 \leq d_2$ κ' $d_2 \leq d_1$ έπεται $d_1 = d_2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.) Αν $a \neq 0$ κ' $b=0$ τότε $ΜΚΔ(a,b) = |a|$

2) $ΜΚΔ(b,a) = ΜΚΔ(a,b)$, γιατί ο ορισμός είναι συμμετρικός

3) Αν $k \in \mathbb{Z}$, $ΜΚΔ(a,1) = 1$

4) Αν $a,b \in \mathbb{Z}$ με $(a,b) \neq (0,0)$ τότε $ΜΚΔ(a,b) = ΜΚΔ(|a|,|b|)$.

γιατί οι θετικοί διαιρέτες του a είναι ακριβώς οι θετικοί διαιρέτες του $|a|$ κ' το ίδιο ισχύει κ' για το b (γιατί για $x \in \mathbb{Z}$ $x|a$ αν $x|-a$)

π.χ. $ΜΚΔ(12,15) = ΜΚΔ(15,12) = ΜΚΔ(15-12,12) = ΜΚΔ(3,12) = ΜΚΔ(12$

$= ΜΚΔ(12-4 \cdot 3, 3) = ΜΚΔ(0,3) = ΜΚΔ(3,0) = 3$